b- Soit $x \in f(D) =]-\infty;+\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \text{Log}(1+2y) = x$

$\Leftrightarrow 1+2y = e^x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty;+\infty[; f^{-1}(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}$.

c- Désignons par A_α l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x=\alpha$.

$\Rightarrow A_\alpha = \int_0^\alpha (f(x) - f^{-1}(x))dx$ (car (C) est au dessus de Δ sur $[0,\alpha] \Rightarrow$ (C') est au dessous de Δ sur $[0,\alpha]$)

$= \int_0^\alpha \text{Log}(1+2x)dx - \int_0^\alpha \left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\right)dx$

$\begin{pmatrix} u'(x) = 1 & \leftrightarrows & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}(1+2x) & \leftrightarrows & v'(x) = \frac{2}{1+2x} \end{pmatrix}$

$= [x\text{Log}(1+2x)]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2x}{1+2x}dx - \frac{1}{2}[e^x - x]_0^\alpha$

$= \alpha\text{Log}(1+2\alpha) - \int_0^\alpha \frac{2x+1-1}{1+2x}dx - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

Or $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \text{Log}(1+2\alpha) = \alpha$ alors $1+2\alpha = e^\alpha$

$A_\alpha = \alpha^2 - \int_0^\alpha \left[1 - \frac{1}{1+2x}\right]dx - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 - \left[x - \frac{1}{2}\text{Log}(1+2x)\right]_0^\alpha - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\text{Log}(1+2\alpha) - \frac{1}{2}(e^\alpha - \alpha - 1)$

$= \alpha^2 + \frac{1}{2}\text{Log}(1+2\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} = \alpha^2 - \alpha$.

4/a- • $u_0 = 1 \in [1;\alpha[\Rightarrow$ la proposition est vraie pour $n = 0$.

•• Soit $p \in \text{IN}$. Supposons que $1 \leq u_p < \alpha$; montrons que $1 \leq u_{p+1} < \alpha$.

$1 \leq u_p < \alpha \Leftrightarrow f(1) \leq f(u_p) < f(\alpha)$ car f est strictement ↗ sur D.

Or $f(1) = \text{Log}3 > 1$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'après **2/a-**

D'où $1 \leq f(u_p) < f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 1 \leq u_{p+1} < \alpha$

Conclusion : • et •• $\Rightarrow \forall n \in \text{IN}, 1 \leq u_n < \alpha$.

b- $\forall n \in \text{IN}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \varphi(u_n) > 0$

(car $\varphi(x) > 0$; $\forall x \in [1;\alpha[$)

D'où $\forall n \in \text{IN}, u_{n+1} > u_n$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est strictement croissante sur IN.

c-

$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur IN} \\ (u_n) \text{ est majorée par } \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge}.$

Posons L la limite de (u_n).

Comme $\forall n \in \text{IN}, 1 \leq u_n < \alpha$ alors $1 \leq L \leq \alpha$.